УДК 535.416.3

КОНСТРУИРОВАНЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю.Н. Исаев

Томский политехнический университет; Институт оптического мониторинга СО РАН
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Описывается алгоритм синтеза биортогональных и комплексных вейвлетов. Приводятся примеры восстановления и сжатия сигналов на основе сконструированных вейвлетов. Описывается их сходство с базисом Карунена-Лоева. Представлена картина пространно-временной развёртки случайного сигнала по масштабам неоднородности. Приводятся примеры разложения и сжатия двумерных сигналов с фильтрацией по направлениям, примеры выделения контуров и усиления контраста изображений.

Ранее [1] мы рассматривали синтез биортогональных вейвлетов, в данной работе мы продолжим рассмотрение биортогональны вейвлетов и приведём алгоритм построения комплексных вейвлетов, которые полезны при анализе и синтезе амплитуды и фазы оптических комплексных сигналов, а также весьма эффективны для выделения контуров изображения. В заключение приведем примеры сжатия и повышения контрастности двумерных изображений.

Критерии синтеза вейвлет-базиса

Для полученных вейвлетов, приведённых в [1], автором проверялся критерий локализации, который выражается соотношением

$$\Delta x \Delta \kappa \geq \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

где

$$\Delta x = \frac{\int |\Psi(x)|^2 (x - x_0) dx}{\int |\Psi(x)|^2 dx}, \quad \Delta \kappa = \frac{\int |\hat{\Psi}(\kappa)|^2 (\kappa - \kappa_0) d\kappa}{\int |\hat{\Psi}(\kappa)|^2 d\kappa}. \qquad (2)$$

При увеличении числа нулевых моментов вейвлетов неравенство (1) быстро стремилось к равенству. То есть вейвлеты модулируются гауссовой функцией, значит они приближаются к собственным функциями оператора Фурье [2] и становятся оптимальными по критерию (1). Это означает, что сигнал ограниченной протяжённости при фиксированном числе членов разложения будет иметь наибольшую энергию, если он представлен вейвлет-базисом, удовлетворяющем равенству (1), это – сходство с базисом Карунена-Лоева. С помощью таких вейвлетов удобно определять скрытую периодичность исследуемых сигналов и определять их мультифрактальную структуру. Приведём вейвлет-разложение случайного сигнала (скорости ветра), приведенного на рис. 1 (вверху). В качестве базиса выберем вейвлет, изображённый на рис. 2, в из работы [1]. На рис. 1 (второй и третий сверху) приведены абсолютные значения коэффициентов вейвлет-разложения случайного сигнала. Это – картина, показывающая относительный вклад неоднородностей разного масштаба в формирование сиг-

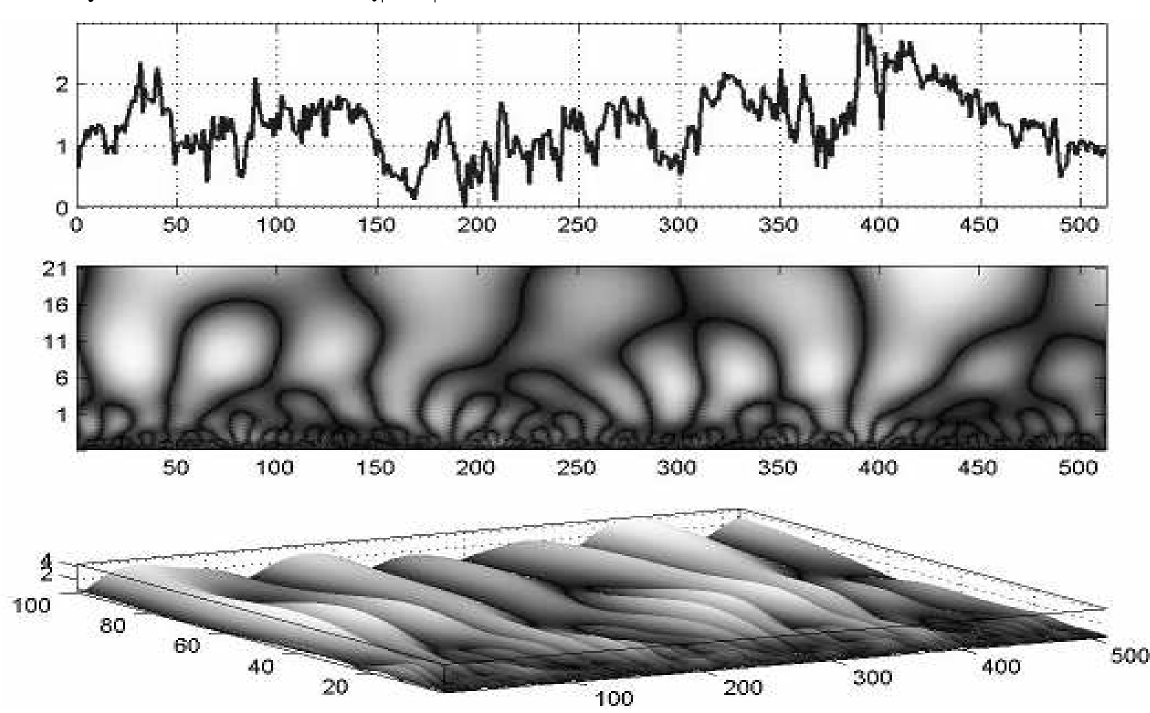


Рис. 1. *Картина абсолютный значений коэффициентов вейвлет-разложения скорости ветра*

нала. Из картины видно, что крупномасштабные неоднородности рассыпаются на более мелкие, в свою очередь мелкие неоднородности рассыпаются в ещё более мелкие, и это каскадный процесс продолжается до самой мелкой фракции неоднородности о чём свидетельствуют характерные разветвления – "вилки".

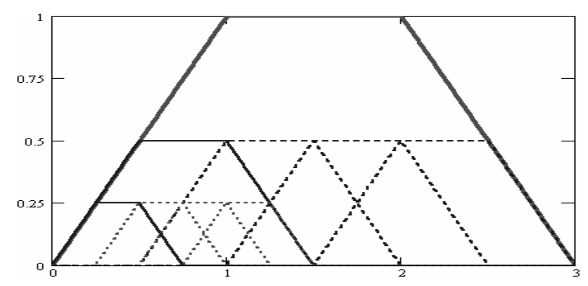


Рис. 2. *Трапециидальная скейлинговая функция*

Этот пример демонстрирует сходство случайного сигнала с мултифрактальной структурой неоднородного канторовского ряда, а, значит, среду распространения сигнала описывать степенным спектром типа κ^{α} можно, если только считать, что α является функцией κ. Такою физическую картину описания неоднородностей удаётся получить благодаря фрактальным свойствам скейлинговых функций вейвлетов, то есть ур. (4) в работе [1], смысл которого графически представлен на рис. 2, где для простоты в качестве скейлинговой функции представлена трапециидальная функция

$$\varphi(x)=0{,}5\varphi(2x)+0{,}5\varphi(2x-1)+0{,}5\varphi(2x-2)+0{,}5\varphi(2x-3). \quad (3)$$

Каждая трапеция состоит из четырёх себе подобных трапеций, этот каскадный процесс, (напоминающий каскадный процесс взаимодействия вихрей в турбулентном процессе) можно продолжать до бесконечности в обоих направлениях, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения размеров трапеций. Можно без труда заметить, что подобный базис более точно соответствует структуре турбулентного потока и, следовательно, и его адекватному описанию.

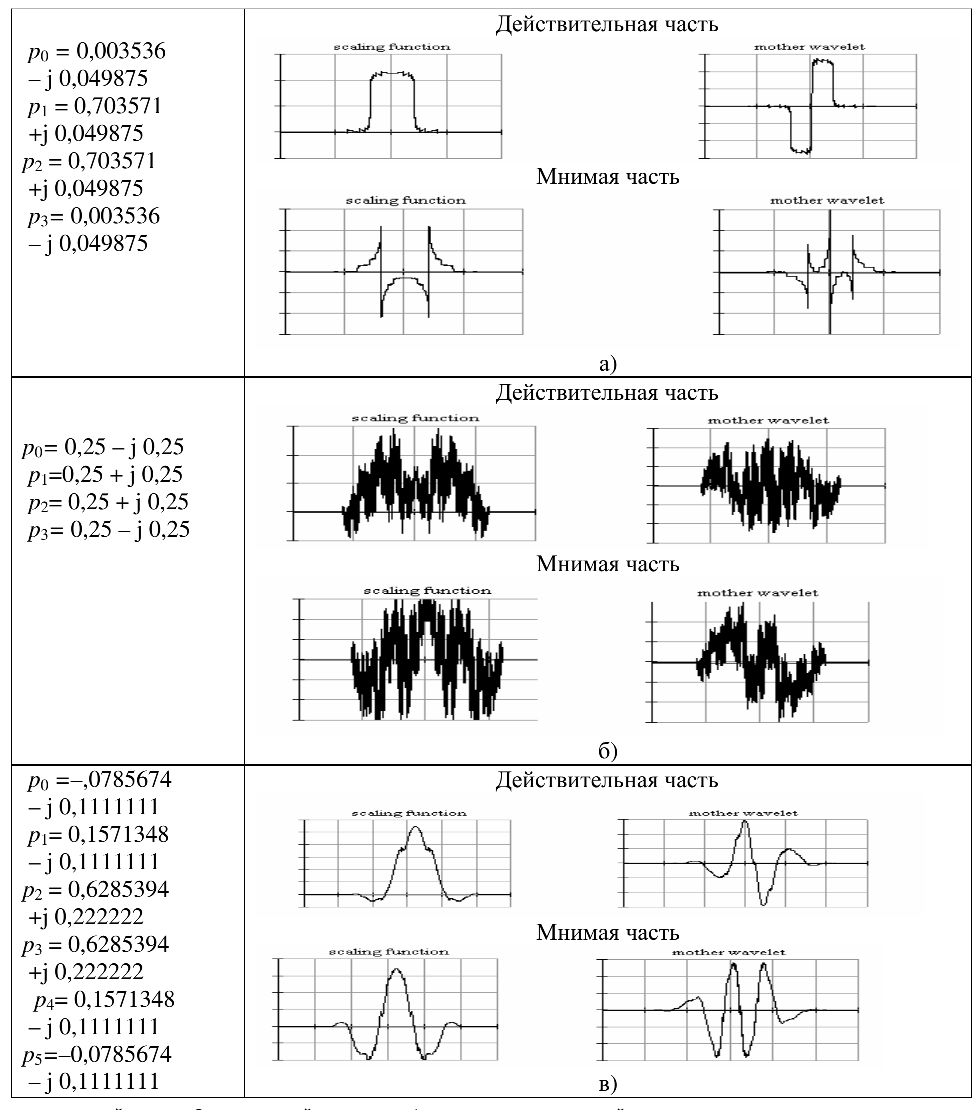


Рис. 3. *Комплексные вейвлеты. Слева — скейлинговые функции, справа — вейвлеты*

При компрессии сигнала необходимо в его разложении иметь наименьшее число членов разложения сохраняя при этом высокой степени аппроксимации. В этом случае при выборе базиса необходимо руководствовать энтропийным критерием.

$$E = -\sum_{1}^{N} a_k \log(a_k) \to \min.$$

Чем меньше энтропия коэффициентов разложения, тем меньше коэффициентов остаются в разложении. Этот критерий означает, что удалось сконструировать вейвлет, наилучшим образом отражающий профиль анализируемого сигнала. Пример использования этого критерия будет продемонстрирован на двумерных сигналах.

Комплексные вейвлеты

В ряде случаев анализ амплитуды и фазы оптического сигнала удобно производить в его комплексном представлении. В этом случае удобно для разложения использовать комплексные вейвлеты. Скейлинговая функция $\varphi(x)$ в этом случае будет имеет комплексные коэффициенты, а двойственная ей функция будет сопряжённой ей функцией

$$\tilde{\varphi}(x)=\bar{\varphi}(x). \quad (4)$$

Приведём алгоритм синтеза комплексных вейвлетов.

Задаёмся вещественной частью коэффициентов в разложении (4), сумма которых равна единице, например

$$Re(p_0) = Re(p_1) = Re(p_2) = Re(p3) = 1/4, \quad (5)$$

затем находим мнимую часть коэффициентов $Im(p_\kappa)$ из уравнения ортогональности (8) из работы [1] и с учётом условия (4)

$$p_0 = p_3 = 1/4+j1/4, \quad p_1 = p_2 = 1/4+j1/4. \quad (6)$$

После определения коэффициентов находим скейлинговые и вейвлет-функции с помощью выражений (4) и (5), приведённых в [1], соответственно. Комплексные вейвлеты можно получить также, используя комплексное решение уравнения Безу. Например, при N=3 решение можно записать так

$$B(x) = A\prod_{j=1}^{3}(x-z_j)(x-\bar{z}_j), \quad (7)$$

тогда в выражения для фильтров $m(\kappa)$ и $\tilde{m}(\kappa)$ будут входить различное сочетание комплексных множителей из (7). На рис. 3 приведены несколько комплексных вейвлетов, полученных по выше описанному алгоритму.

2D-вейвлет-базисы

Приведём пример использования вейвлет-базиса для обработки двумерных изображений. Запишем тензорное произведение одномерных вейвлетов и перейдем к определению трёх двумерных вейвлетов

$$\Psi_г(x,y) = \varphi(x)\Psi(y),\ \Psi_в(x,y)=\Psi(x)\varphi(y),\ \Psi_д(x,y)=\varphi(x)\ \varphi(y). \quad (8)$$

Такое представление удобно тем, что осуществляется фильтрация изображения по горизонтальным вертикальны и диагональном направлениях, соответствующие вейвлеты снабжены индексами. Путем сдвигов и сжатия образуется базис

$$\Psi_{j,n1,n2}(x,y)= 2^{-j}\Psi(2^{-j}x-n1, 2^{-j}y-n2). \quad (9)$$

Все соотношения (1–5), приведённые в [1] для одномерного случая, остаются верными для двумерного базиса.

В качестве примера работы вейвлетов приведём пример сжатия 2D-изображения (рис. 4) с помощью вейвлета, изображённого на рис. 2, *б* в работе [1]. Исходное количество коэффициентов было 256×256 с последующем уменьшением в 4 раза. Для выделения краевых эффектов изображения с учётом направления выберем вейвлет, изображённый на рис. 6, *б* в работе [1]. Результаты восстановления опробованы на двух различных структурах и приведены на рис. 5. Как рис. 4, так и рис. 5 отчётливо демонстрируют полезное свойство вейвлетов фильтровать по горизонтальным, вертикальным и диагональным направлениях.

Приведём пример выбора наиболее оптимального вейвлета. На рис. 6 представлено изображение разложенное по трём различным вейвлетам. Изображения расположены снизу вверх по увеличению степени сжатия, а, следовательно, оптимальности вейвлета. Оптимальность разложения определялась по энтропийному критерию $E = -\sum_{1}^{N} a_k \log(a_k)$. Оптимальность разложения можно увидеть "нево-

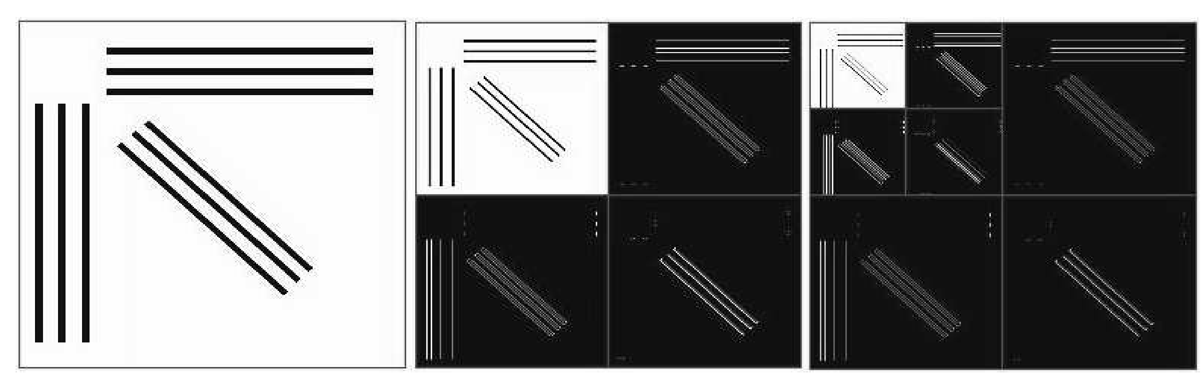


Рис. 4. *Сжатие и фильтрация изображения по направлениям*

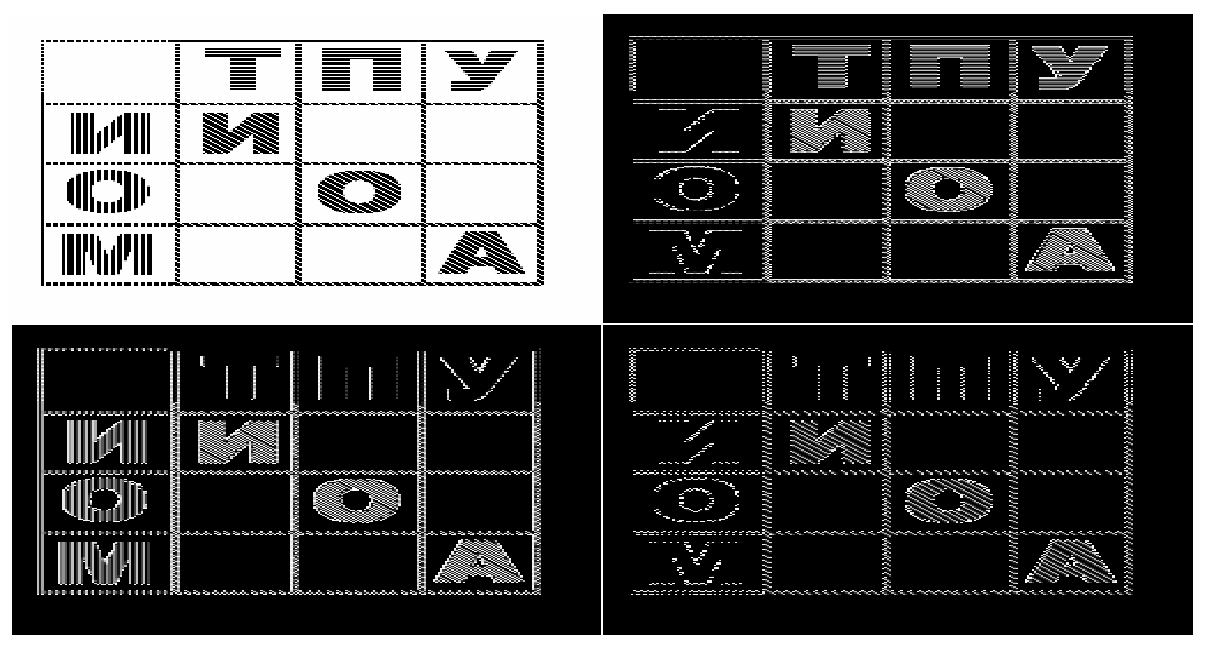


Рис. 5. *Фильтрация текстового изображения по направлениям*

оружённым глазом". Заметим, что первое изображение (снизу вверх) после разложения второго уровня (т.е. после сжатия изображения в 4 раза) потеряло значительно меньше информации, чем второе, а второе изображение потеряло меньше, чем третье. За приделами не оптимально сжатого изображения остаётся узнаваемый рельеф изображения. Особенно это хорошо видно после фильтрации (рис. 7).

Рассмотрим применение комплексного вейвлета для выделения контуров изображения. При анализе функций с сингулярными особенностями хорошо известен метод её регуляризации. Сингулярную функцию аналитически продолжают в комплексную область. Тогда функция разделяется на обобщённую (гладкая версия исходной) и сингулярный вклад который является мнимым [3, 4]. Если рассматривать изображение, как функцию с

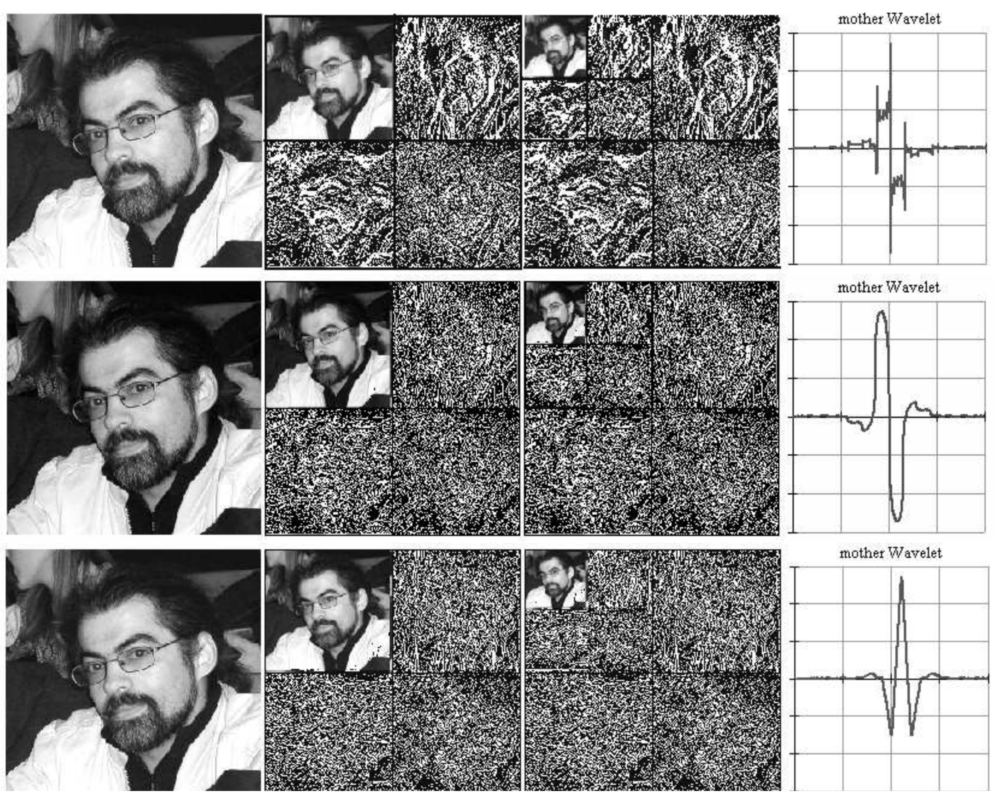


Рис. 6. *Выбор оптимального вейвлета для сжатия изображения*

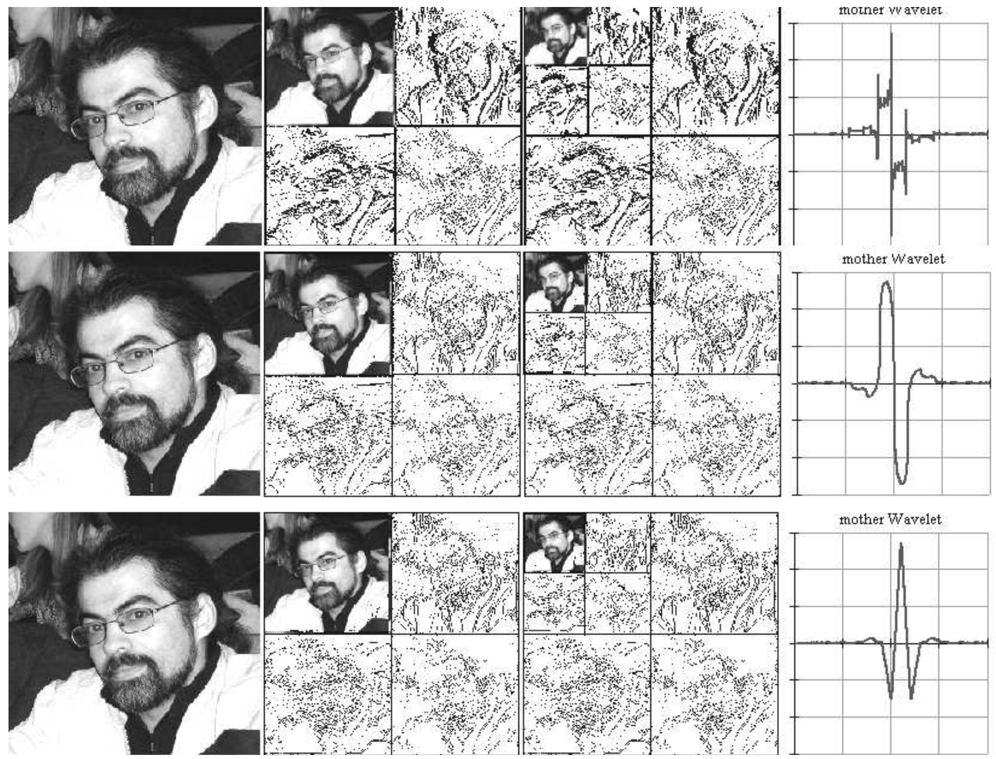


Рис. 7. *Выбор оптимального вейвлета для сжатия изображения с фильтрацией высокочастотного шума*

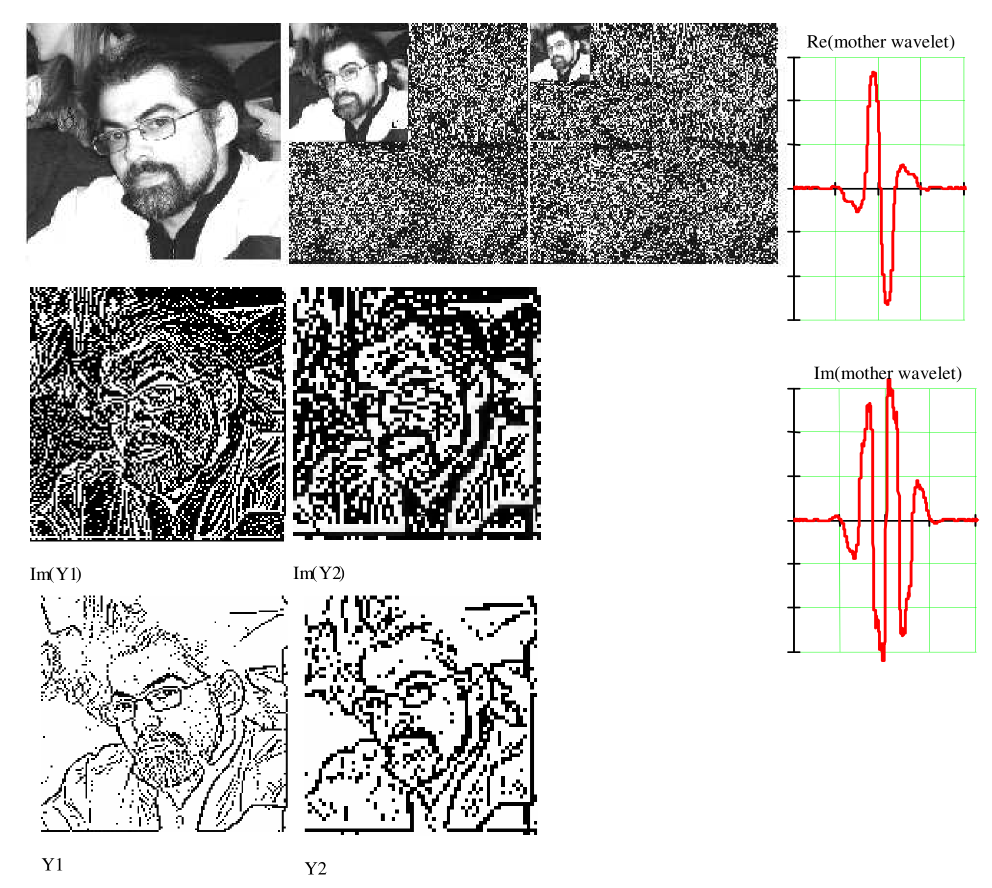


Рис. 8. *Использование комплексных вэйлетов для выделения контуров изображения*

особенностями, и, используя комплексное вейвлет-разложение изображения, можно ожидать, что сильные изменения градиента интенсивности изображения окажутся в мнимой части разложения. Следует только правильно сконструировать комплексный вейвлет. Необходимо, чтобы мнимая часть вейвлета имела как можно больше нулевых моментов, тогда его мнимая часть будет быстро осциллирующей [5, 6]. Автором сконструирован комплексный вейвлет, изображённый на рис. 8 на основе решения уравнений (7), (8) из работы [1] и с дополнительным условием

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k}k^{m}p_{k}\right)=0,\quad m=0...N/2.$$

На том же рисунке продемонстрировано действие вейвлета на изображение.

Первое изображение сверху разложено в действительную часть вейвлета, второе изображение сверху разложено в мнимую часть вейвлета. Третий изображение сверху получено из второго после фильтрации шума.

Рассмотрим использование вейвлетов для повышения контрастности изображения. Одной из важных проблем видения изображений, наблюдаемых в рассеивающих средах и описываемых в терминах уравнения сверки, является задача восстановления замутненных изображений. Класс задач, связанных с этой проблемой, например, в спутниковом мониторинге подстилающей поверхности Земли, необозримо велик. Сложность решения этой задачи определяется тем, что функция размытия точки на момент регистрации изображений, как правило, неизвестна, кроме того, необходимо

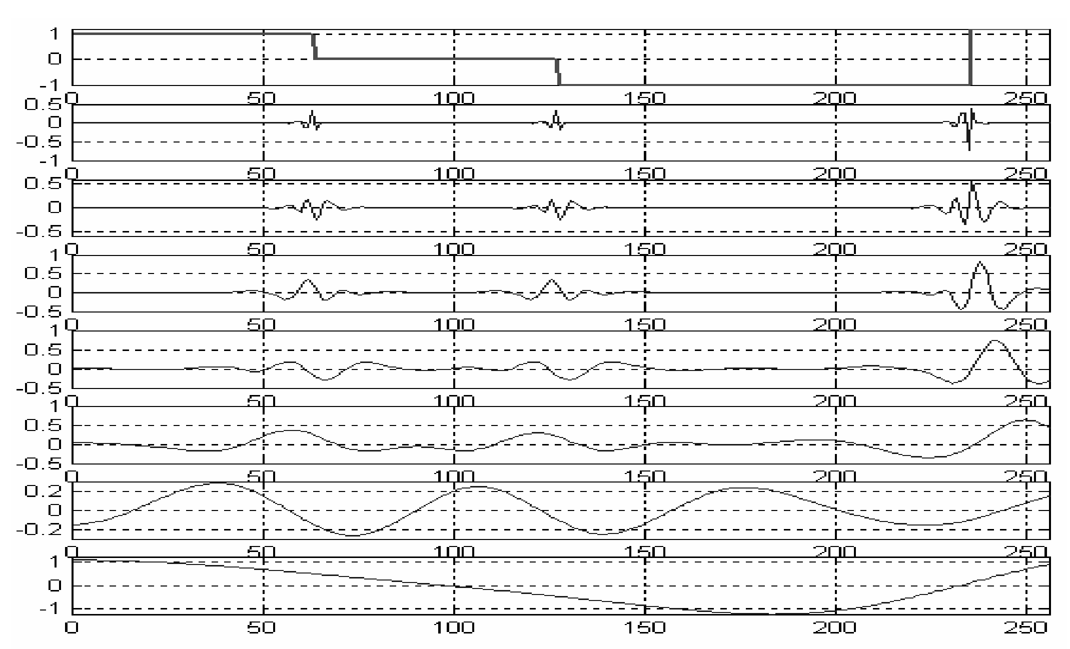


Рис. 9. *Вейвлет-разложение сигнала по уровням разрешения*

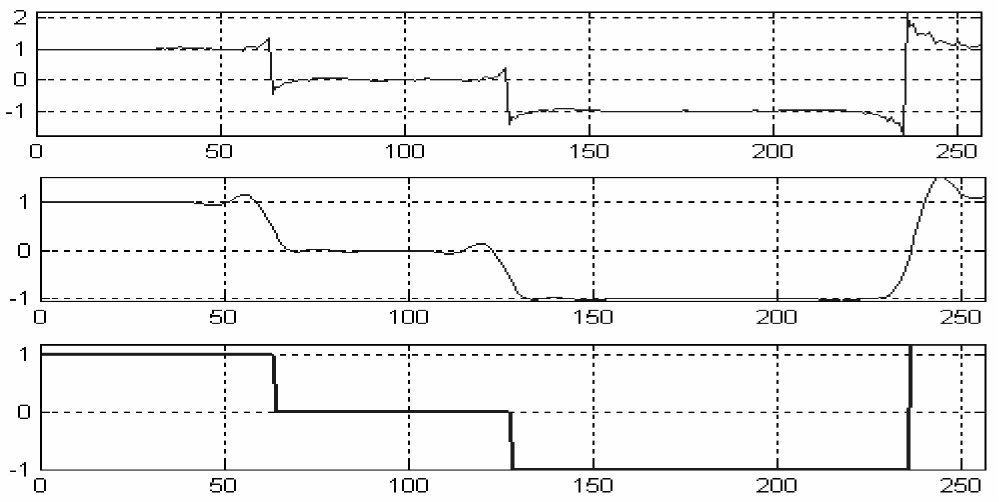


Рис. 10. *Сужение функции рассеяния точки*

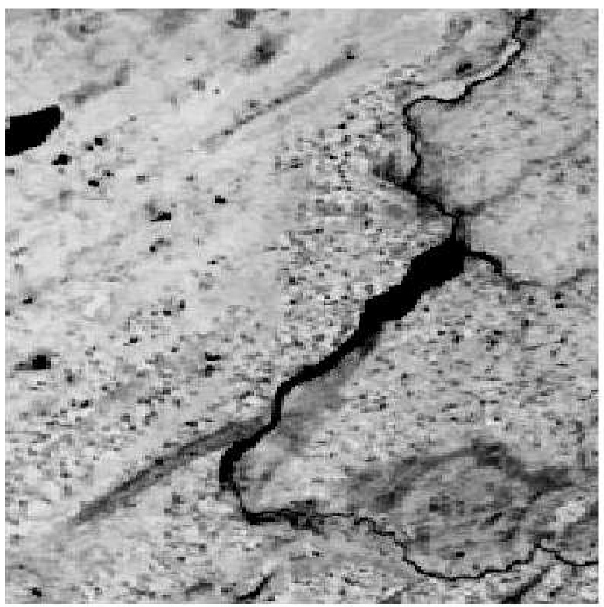
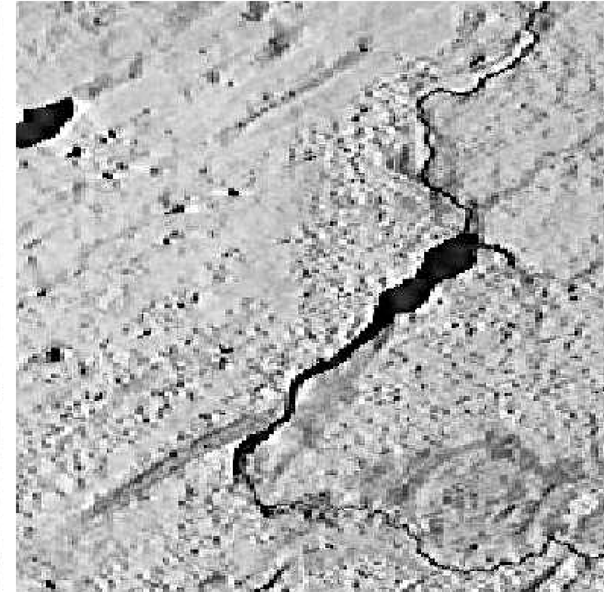



Рис. 11. *Усиление контрастности изображения*

учитывать некорректность операции обращения свертки. Среди многообразия реальных атмосферно-оптических ситуаций нередки случаи, когда мы наблюдаем достаточно четкое, хотя и слабоконтрастное изображение на фоне общего "размытия". Это соответствует такому виду функции размытия точки, которая содержит четко выраженную дельта-составляющую и "размытое основание". Если построить преобразование, "усиливающее" роль высокочастотных составляющих наблюдаемого размытого изображения и подавить фоновую составляющую, то получим восстановленное высококонтрастное изображение. Технология использования вейвлет-преобразований для решения этой задачи заключается в следующем. Выбирается объект, имеющий резкие границы, например объект с прямоугольными краями (рис. 9). Производится его вейвлет-разложение по уровням разрешения. Далее, для усиления роли высоких частот вейвлет-коэффициенты высокого уровня разрешения помножаются на множитель выше единицы, а низкочастотные - на множитель меньше единицы. Для примера на рис. 9 было выбрано 7 уровней разложения. Самый низкий уровень разложения с коэффициентом k_7=0,9 и дальше по уровням возрастания разрешения, соответственно, k_6=0,8, k_5=1,0, k_4=1,4, k_3=1,5, k_2=1,5, k_1=1,5. Затем производится обратное вейвлет-преобразование и получатся картина, приведённая на рис. 10, где заметно усилена роль краёв изображения. Таким образом, перераспределяя относительный вклад различных уровней разложения можно сузить функцию рассеяния точки. После того, как коэффициенты уровней определены, можно переходить к обработке 2D-изображения. В качестве примера рассмотрено спутниковое изображение Новосибирского водохранилища (рис. 11). Множители по уровням разрешения были выбраны те же, что и для рис. 10. Видно, что в обработанном изображении повышенная контрастность, чётче узнаётся рельеф местности.

В настоящей работе представлены группа новых биортогональных и комплексных вейвлетов, приведён алгоритм их синтеза. Приведены примеры синтеза и анализа модельных сигналов. Приведена возможность визуализации фрактальной структуры сигнала, варьирования масштабов неоднородности среды распространения сигнала с помощью коэффициентов вейвлет-разложения. Продемонстрированы полезные свойства полученных вейвлетов фильтровать по направлениям и выделять тонкую структуру изображения. Полученные комплексные сигналы позволяют выделять контуры изображения и оптимально их представлять. Полученные вейвлеты позволяют улучшить контрастность изображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев Ю.Н. Конструирование биортогональных вейвлет-базисов для оптимального представления сигналов // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 1. – С. 37–42.
2. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 406 с.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М: Физматгиз, 1959. – 470 с.
4. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 347 с.
5. Исаев Ю.Н. Синтез вейвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Ч. I. Ортогональный вейвлет-базис // Оптика атмосферы и океана. – 2002. – Т. 15. – № 11. – С. 974–981.
6. Исаев Ю.Н. Синтез вейвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Ч. III. Представление дифференциальных и обратных им операторов в вейвлет-базисах. Вейвлет пакеты // Оптика атмосферы и океана. – 2003. – Т. 16. – № 8. – С. 688–694.